21/11/2020

Άσκηση: Κάθε σφαίρα και κάθε κλειστή μπάλα είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^4$.

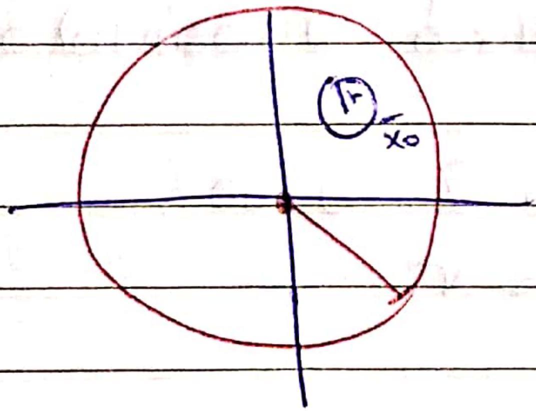
Απόδ:

Καταρχάς είναι φραγμένα. Έστω $r>0$ και $\bar{x_0} \in \mathbb{R}^4$, τότε: $\exists R>0 : \bar{B}(\bar{x_0}, r) \subset B(\bar{0}, R)$ δηλ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^4$ με: $\|\bar{x} - \bar{x_0}\| \leq r : \|\bar{x}\| < R$

$[\ \|\bar{x}\| = \|\bar{x} - \bar{x_0} + \bar{x_0}\| \leq \|\bar{x} - \bar{x_0}\| + \|\bar{x_0}\| \leq r + \|\bar{x_0}\|$

$\Rightarrow$ πράγματι για κάθε $R > r + \|\bar{x_0}\|$ ισχύει ο ισχυρισμός για την κλειστή μπάλα $\Rightarrow$ και για τη σφαίρα

(είναι σύνορο της κλειστής μπάλας) $\partial B(\bar{x_0}, r) \subset B(\bar{x_0}, r)$



$\longrightarrow$ D

Μένει να δείξουμε ότι η κλειστή μπάλα και η σφαίρα είναι κλειστά σύνολα:
(με πρότ. 1.4.7)

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset \bar{B}(\bar{x}_0, r)$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \in \mathbb{R}^k$
Θνδο: $\underbrace{\bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \le r}$ $\underbrace{(\text{τυχαία αλλά σταθ. ακολ.})}_{\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \le r}$

$\Rightarrow \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}_{=:a} \le \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{\le r =: b} + \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}\|}_{\to 0 \ =: \gamma_\nu} \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \le r$ (*)

[Έστω $0 \le a \le b + \gamma_\nu$ με $\gamma_\nu \to 0 \Rightarrow a \le b$:
Έστω $a > b$. Τότε $a - b > 0$. Όμως $\exists \nu_0 : \forall \nu \ge \nu_0$:
$: |\gamma_\nu| < \frac{a-b}{2} \Leftrightarrow -\frac{a-b}{2} < \gamma_\nu < \frac{a-b}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow -\frac{a}{2} + \frac{3b}{2} < b + \gamma_\nu < \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

Από την άλλη έχουμε: $a \le b + \gamma_\nu$. Συνεπώς
$a < \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2} \Leftrightarrow \underline{a < b}$
άτοπο στην υπόθεση $a > b$

Επίσης (και πιο εύκολα) αποδ. με την πρότ. 1.4.7/Σημ. ότι η σφαίρα $\partial B(\bar{x}_0, r)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$:
Έστω $\underbrace{(\bar{x}_\nu) \subset \partial B(x_0, r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| = r}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}$. Θνδο:
$\underbrace{\bar{x} \in \partial B(\bar{x}_0, r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r}$

Πράγματι: $\bar{x}_\nu \to \bar{x} \Leftrightarrow \bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to \bar{x} - \bar{x}_0$

$\overset{\text{ορ.}}{\Leftrightarrow} \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0 \qquad \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0 - (\bar{x} - \bar{x}_0)\| =$

και: $\qquad = \|\bar{x}_\nu - \bar{x}\| \to 0$

$\bar{x}_\nu - \bar{x}_0 \to \bar{x} - \bar{x}_0 \Rightarrow \underbrace{\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\|}_{=r} \to \underbrace{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|}_{=r}$

[$\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0 \Leftrightarrow \|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\| \to 0 \Rightarrow \big|\|\bar{y}_\nu\| - \|\bar{y}_0\|\big| \leq$
$\leq \|\bar{y}_\nu - \bar{y}_0\| \to 0 \Rightarrow \|\bar{y}_\nu\| \to \|\bar{y}_0\|$]